

Sayılar ve Matrisler Teorisi

Editör: Prof. Dr. *Salim Yüce*



Editör: Prof. Dr. *Salim Yüce*

SAYILAR VE MATRİSLER TEORİSİ

ISBN 978-625-6357-88-4

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© 2023, PEGEM AKADEMİ

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınevi**dir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere <http://pegem.net> adresinden ulaşılabilir.

I. Baskı: Mart 2023, Ankara

Yayın-Proje: Şehriban Türüldür
Dizgi-Grafik Tasarım: Pegem Akademi
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Ay-bay Kırtasiye İnşaat Gıda Pazarlama ve Ticaret Ltd. Şti.
Çetin Emeç Bulvarı 1314. Cadde No: 37A-B Çankaya/ANKARA
Tel: (0312) 472 58 55

Yayıncı Sertifika No: 51818
Matbaa Sertifika No: 46661

İletişim

Macun Mah. 204. Cad. No: 141/A-33 Yenimahalle/ANKARA
Yayınevi: 0312 430 67 50
Dağıtım: 0312 434 54 24
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60
İnternet: www.pegem.net
E-ileti: pegem@pegem.net
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

*2016 yılından itibaren "Yüce Research Group" üyesi
olarak özverili bir şekilde bilimsel çalışmalarda yer alan;
akademik ve insani etik değerlere sahip sevgili öğrencilerime
ithaf ediyorum.*

Prof. Dr. *Salim Yüce*

1974 Tokat/Niksar'da doğdu. İlkokul-ortaokul-liseyi Tokat'ta tamamladı. 1992-1996 yılları arasında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü, 1996-1999 yılları arasında aynı üniversitede Matematik/Geometri alanında yüksek lisansını, 1999-2004 yılları arasında doktorasını tamamladı. 2006 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik bölümünde Doktor Öğretim Üyesi olarak atandı ve aynı yıl Doçent unvanını aldı. 2012 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi'nde Profesör olarak atandı.

2009 yılında Fen Bilimleri Enstitüsünde Müdür Yardımcılığı, 2012 yılında Rektör Yardımcılığı görevlerinde bulundu. 2016 yılında Yıldız Teknik Üniversitesinde Rektör adayı oldu. 2018 yılında YÖK-TEBİP Matematik Üstün Başarı Sınıfında görevlendirildi. Üniversite Yönetim Kurulu ve Senato Üyeliği görevlerini yerine getirmiş olup Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı Başkanlığı görevini Anabilim Dalı Başkanlıklarının kapandığı 2022 yılına kadar yürüttü. 2022 yılı Ağustos ayında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanlığına ve 26 Ocak 2023 tarihi itibariyle YTÜ Fen Edebiyat Fakültesi Dekanlığına atanmış olup halen bu görevleri yürütmektedir.

Prof. Dr. Salim YÜCE'nin akademik etkinlikleri kapsamında 8 adet kitap yazarlığı, 4 adet ulusal araştırma projesi, tamamlanmış 11 yüksek lisans ve 11 doktora ile devam eden 5 yüksek lisans ve 2 doktora tezi yöneticiliği, uluslararası toplam 87 makalesi, ulusal ve uluslararası kongrelerde 87 adet bildiri sunumu olup çeşitli dergilerde editörlük/hakemliği, 13. Ulusal Geometri Sempozyumu Düzenleme Kurulu Başkanlığı ve Hagia Sophia Journal of Geometry (HSJG) dergisinin baş editörlüğü görevinde bulunmaktadır. Evli ve iki erkek çocuğu sahibidir.

Ön Söz

İnsanlık tarihinin en büyük buluşunun “Sayılar” olduğuna herkes hemfikirdir sanırım. Bir “ $e = 2,718\dots$ ” sayısının mühendislikte harikalar yarattığını; bir “ $\pi = 3,14\dots$ ” sayısının virgülden sonraki milyar basamaklarında doğum tarihlerimizi, TC numaralarımızı gizlemesi tesadüf olmamalıdır. “*Sayılar ve Geometri (Pegem Akademi, 2020)*” kitabında diğer gizemli sayıları ve bu sayıların geometrilerini tanıtmıştık. Bu kitapta,

- ikili (düzlemsel) sayı (kompleks, hiperbolik, dual, genelleştirilmiş kompleks vb.)
- uzaysal sayı (reel kuarterniyon, split kuarterniyon, oktoniyon vb.)
- Fibonacci ile Lucas sayı

katsayılı matrislerin cebirsel işlemleri ve cebirsel yapıları en detaylı tüm detayları ile incelendi. Kitabın ilerleyen baskılarında da, diğer sayılar kullanılarak matris teorisinin genişletilmesi planlanmaktadır.

Matrisler Teorisi ile Sayılar alanlarının buluştuğu ve sayıların matris düzeyinde geniş bir görünümünü sunan bu kitap, Matematiğin tüm alanlarında veya disiplinler arası çalışmalar yapan araştırmacılara faydalı olacağı düşüncesindeyim. Ayrıca, sayıların ve matris konularının çekici ve olağandışı işleyişi nedeniyle lisansüstü öğrencileri ve Matematik araştırmacıları arasında popüler olacağı düşüncesindeyim. Kitabın dizin işlemlerinde büyük emek sarf eden lisansüstü öğrencilerim Arş. Gör. Edanur ERGÜL, Arş. Gör. Hamide Feyza AYKUT ve Öğr. Gör. Kübra ÇETİNERBERK nezdinde tüm “Yüce Research Group” üyelerine teşekkür ederim.

Kitabın, lineer cebir, sayılar teorisi, matris teorisi alanlarının yanı sıra disiplinler arası yapılacak her akademik çalışma için bir rehber olması dileğiyle...

En derin saygılarımla.

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi
Yüce Research Group

İçindekiler

BÖLÜM 1 GİRİŞ

- 1.1 Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar 2

BÖLÜM 2 KOMPLEKS MATRİSLER

- 2.1 Kompleks Matrisler..... 10
- 2.2 Kompleks Matrislerde Cebirsel İşlemler 11
- 2.2.1 Kompleks Matrislerde Toplama 11
- 2.2.2 Kompleks Matrislerde Çarpma..... 13
- 2.2.3 Kompleks Matrislerde Eşlenik..... 17
- 2.2.4 Kompleks Matrislerde Transpoz..... 18
- 2.2.5 Kompleks Matrislerde Eşlenik Transpoz 19
- 2.2.6 Kompleks Matrislerin Tersi 20
- 2.2.7 Kompleks Matrislerde İz..... 24
- 2.3 Kompleks Matrisler İçin Elementer Operasyonlar..... 26

2.4	Kompleks Matrisler Kümesinin Cebirsel Yapıları	30
2.4.1	\mathbb{R} Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı	30
2.4.1.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{C}), +, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ Vektör Uzayının Bazı	30
2.4.1.2	$\{M_{m \times n}(\mathbb{C}), +, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ Vektör Uzayı Üzerinde İç Çarpım	32
2.4.2	\mathbb{C} Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı	35
2.4.2.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{C}), +, \mathbb{C}, +, \cdot, \odot\}$ Vektör Uzayının Bazı	37
2.4.2.2	$\{M_{m \times n}(\mathbb{C}), +, \mathbb{C}, +, \cdot, \odot\}$ Vektör Uzayı Üzerinde İç Çarpım	38
2.4.3	$M_n(\mathbb{R})$ Üzerinde Sol Modül Yapısı	40
2.4.3.1	$\{M_n(\mathbb{C}), +, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \Theta\}$ Sol Modülünün Bazı	41
2.4.3.2	$\{M_n(\mathbb{C}), +, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \Theta\}$ Sol Modülü Üzerinde İç Çarpım	43
2.5	Kompleks Blok Matrisler	44
2.5.1	Kompleks Blok Matrisler Üzerinde Cebirsel İşlemler ve Cebirsel Yapılar	45
2.5.1.1	Kompleks Blok Matrislerde Toplama İşlemi	45
2.5.1.2	Kompleks Blok Matrisin Skalerle Çarpımı	47
2.5.1.3	Kompleks Blok Matrislerin Çarpma İşlemi	52
2.5.1.4	Kompleks Blok Matrislerin Kronecker Çarpımı	57
2.5.1.5	Kompleks Blok Matrisin Eşleniği	63
2.5.1.6	Kompleks Blok Matrisin Transpozu	64
2.5.1.7	Kompleks Blok Matrislerin Eşlenik Transpozu	65
2.5.1.8	Kompleks Blok Matrisin İzi	66
2.5.2	Kompleks Blok Matrisler İçin Elementer Operasyonlar	67
2.6	Özel Tanımlı Kompleks Matrisler	69
2.7	Kompleks Matrislerin Matris Temsili	82
2.7.1	\mathbb{R} -Vektör Uzayındaki Kompleks Matrisler Temsili	82
2.7.2	\mathbb{C} -Vektör Uzayındaki Kompleks Matrisler Temsili	90

2.7.3	$M_n(\mathbb{R})$ -Modül Üzerindeki Kompleks Matrisler Temsili.....	95
2.8	Kompleks Matrislerin Determinantı	111
2.8.1	Determinant Hesaplamaları	113
2.8.2	Determinant Açılımları	118
2.8.3	Klasik Determinantın Diğer Hesaplamaları	122
2.8.3.1	$M_2(\mathbb{C})$ Üzerinde Determinant Hesaplamaları	122
2.8.3.2	$M_3(\mathbb{C})$ Üzerinde Determinant Hesaplamaları	125
2.8.4	Kompleks Blok Matrisin Determinantı	129
2.8.5	Kompleks Matrislerin Matris Temsillerinin Determinantları.....	133
2.8.5.1	Reel Matris Temsilinin Determinantı	133
2.8.5.2	Kompleks Blok Matris Temsilinin Determinantı.....	135
2.8.5.3	Reel Blok Matris Temsilinin Determinantı.....	136
2.9	Kompleks Matrislerin Tersinin Hesaplanması	137
2.9.1	Kompleks Matrisin Eki ve Ek Matris Yardımıyla Tersini	138
2.9.2	Kompleks Matrisin Tersini Reel Blok Matris Temsili ile Bulma.....	144
2.9.3	Kompleks Blok Matrisin Tersini	147
2.10	Kompleks Lineer Denklem Sistemleri	149
2.10.1	Katsayılar Matrisinin Tersini Yardımıyla Kompleks Lineer Denklem Sisteminin Çözümü	151
2.10.2	Elementer Operasyonlar Yardımıyla Kompleks Lineer Denklem Sisteminin Çözümü	153
2.10.3	Homojen Lineer Denklem Sisteminin Çözümü	154
2.10.4	Cramer Yöntemi ile Lineer Denklem Sisteminin Çözümü	156
2.10.5	Reel Matris Temsili Yardımıyla Kompleks Lineer Denklem Sisteminin Çözümü.....	158

2.11	Kompleks Matrislerde Özdeğer, Özvektör ve Köşegenleştirme	160
2.11.1	Kompleks Matrisin Özdeğerleri ve Özvektörleri	160
2.11.2	Kompleks Matrislerde Köşegenleştirme	168
2.11.3	Özel Tanımlı Matrislerin Özdeğer ve Özvektörleri	170

BÖLÜM 3

HİPERBOLİK MATRİSLER

3.1	Hiperbolik Matrisler	180
3.2	Hiperbolik Matrislerde Cebirsel İşlemler	182
3.2.1	Hiperbolik Matrislerde Toplama	182
3.2.2	Hiperbolik Matrislerde Çarpma	183
3.2.3	Hiperbolik Matrislerde Eşlenik	187
3.2.4	Hiperbolik Matrislerde Transpoz	188
3.2.5	Hiperbolik Matrislerde Eşlenik Transpoz	189
3.2.6	Hiperbolik Matrislerin Tersi	191
3.2.7	Hiperbolik Matrislerde İz	194
3.3	Hiperbolik Matrisler İçin Elementer Operasyonlar	196
3.4	Hiperbolik Matrisler Kümesinin Cebirsel Yapıları	198
3.4.1	\mathbb{R} Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı	198
3.4.1.1	$\{M_{m \times n}(H), +, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ Vektör Uzayının Bazı	199
3.4.1.2	$\{M_{m \times n}(H), +, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ Vektör Uzayı Üzerinde İç Çarpım	201
3.4.2	H Halkası Üzerindeki Modül Yapısı	202
3.4.2.1	$\{M_{m \times n}(H), +, H, +, \cdot, \odot\}$ Modülün Bazı	204
3.4.2.2	$\{M_{m \times n}(H), +, H, +, \cdot, \odot\}$ Modülü Üzerinde İç Çarpım	206

3.4.3	$M_n(\mathbb{R})$ Üzerinde Sol Modül Yapısı.....	207
3.4.3.1	$\{M_n(H), +, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \Theta\}$ Sol Modülün Bazı.....	208
3.5	Hiperbolik Blok Matrisler.....	210
3.5.1	Hiperbolik Blok Matrisler Üzerinde Cebirsel İşlemler ve Cebirsel Yapılar	211
3.5.1.1	Hiperbolik Blok Matrislerde Toplama İşlemi.....	211
3.5.1.2	Hiperbolik Blok Matrisin Skalerle Çarpımı.....	212
3.5.1.3	Hiperbolik Blok Matrislerin Çarpma İşlemi.....	214
3.5.1.4	Hiperbolik Blok Matrislerin Kronecker Çarpımı.....	216
3.5.1.5	Hiperbolik Blok Matrisin Eşleniği.....	218
3.5.1.6	Hiperbolik Blok Matrisin Transpozu.....	219
3.5.1.7	Hiperbolik Blok Matrislerin Eşlenik Transpozu.....	220
3.5.1.8	Hiperbolik Blok Matrisin İzi.....	221
3.6	Özel Tanımlı Hiperbolik Matrisler.....	222
3.7	Hiperbolik Matrislerin Matris Temsili.....	232
3.7.1	\mathbb{R} -Vektör Uzayındaki Hiperbolik Matrisler Temsili.....	232
3.7.2	H -Modül Üzerindeki Hiperbolik Matrisler Temsili.....	237
3.7.3	$M_n(\mathbb{R})$ -Modül Üzerindeki Hiperbolik Matrisler Temsili.....	241
3.8	Hiperbolik Matrislerin Determinantı.....	249
3.8.1	Determinant Hesaplamaları.....	252
3.8.2	Determinant Açılımları.....	255
3.8.3	Klasik Determinantın Diğer Hesaplamaları.....	256
3.8.3.1	$M_2(H)$ Üzerinde Determinant Hesaplamaları.....	256
3.8.3.2	$M_3(H)$ Üzerinde Determinant Hesaplamaları.....	259
3.9	Hiperbolik Matrislerin Tersinin Hesaplanması.....	261
3.9.1	Hiperbolik Matrisin Eki ve Ek Matris Yardımıyla Tersini.....	261

BÖLÜM 4

DUAL MATRİSLER

4.1	Dual Matrisler	268
4.2	Dual Matrislerde Cebirsel İşlemler	269
4.2.1	Dual Matrislerde Toplama	269
4.2.2	Dual Matrislerde Çarpma	271
4.2.3	Dual Matrislerde Eşlenik	274
4.2.4	Dual Matrislerde Transpoz	276
4.2.5	Dual Matrislerde Eşlenik Transpoz	277
4.2.6	Dual Matrislerin Tersi	279
4.2.7	Dual Matrislerde İz	283
4.3	Dual Matrisler İçin Elementer Operasyonlar	284
4.4	Dual Matrisler Kümesinin Cebirsel Yapıları.....	286
4.4.1	\mathbb{R} Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı	286
4.4.1.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{D}), +, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ Vektör Uzayının Bazı	287
4.4.1.2	$\{M_{m \times n}(\mathbb{D}), +, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ Vektör Uzayı Üzerinde İç Çarpım	287
4.4.2	\mathbb{D} Halkası Üzerindeki Modül Yapısı	289
4.4.2.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{D}), +, \mathbb{D}, +, \cdot, \odot\}$ Modülünün Bazı	291
4.4.2.2	$\{M_{m \times n}(\mathbb{D}), +, \mathbb{D}, +, \cdot, \odot\}$ Modülü Üzerinde İç Çarpım	292
4.4.3	$M_n(\mathbb{R})$ Üzerinde Sol Modül Yapısı	294
4.4.3.1	$\{M_n(\mathbb{D}), +, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \Theta\}$ Modülü Üzerinde Sol Modülün Bazı	295
4.5	Dual Blok Matrisler	297
4.5.1	Dual Blok Matrisler Üzerinde Cebirsel İşlemler ve Cebirsel Yapılar ..	298
4.5.1.1	Dual Blok Matrislerde Toplama İşlemi	298
4.5.1.2	Dual Blok Matrisin Skalerle Çarpımı	300

4.5.1.3	Dual Blok Matrislerin Çarpma İşlemi	302
4.5.1.4	Dual Blok Matrisin Eşleniği	304
4.5.1.5	Dual Blok Matrislerin Transpozu	305
4.5.1.6	Dual Blok Matrislerin Eşlenik Transpozu	306
4.5.1.7	Dual Blok Matrislerin İzi	307
4.5.2	Dual Blok Matrisler İçin Elementer Operasyonlar	308
4.6	Özel Tanımlı Dual Matrisler	309
4.7	Dual Matrislerin Matris Temsili	312
4.7.1	\mathbb{R} -Vektör Uzayındaki Dual Matrisler Temsili	312
4.7.2	\mathbb{D} -Modül Üzerindeki Dual Matrisler Temsili	317
4.7.3	$M_n(\mathbb{R})$ -Modül Üzerindeki Dual Matrisler Temsili	319
4.8	Dual Matrislerin Determinantı	332
4.8.1	Determinant Hesaplamaları	334
4.8.2	Determinant Açılımları	338
4.8.3	Klasik Determinantın Diğer Hesaplamaları	341
4.8.4	Dual Blok Matrisin Determinantı	347
4.9	Dual Matrislerin Tersinin Hesaplanması	349
4.9.1	Dual Matrisin Eki ve Ek Matris Yardımıyla Tersini	349
4.9.2	Dual Matrisin Tersini Reel Blok Matris Temsili ile Bulma	353

BÖLÜM 5

GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMPLEKS MATRİSLER

5.1	Genelleştirilmiş Kompleks Matrisler	358
5.2	Genelleştirilmiş Kompleks Matrislerde Cebirsel İşlemler ..	359
5.2.1	Genelleştirilmiş Kompleks Matrislerde Toplama	359

5.2.2	Genelleştirilmiş Kompleks Matrislerde Çarpma	361
5.2.3	Genelleştirilmiş Kompleks Matrislerde Eşlenik	364
5.2.4	Genelleştirilmiş Kompleks Matrislerde Transpoz	365
5.2.5	Genelleştirilmiş Kompleks Matrislerde Eşlenik Transpoz	366
5.2.6	Genelleştirilmiş Kompleks Matrislerin Tersisi	369
5.2.7	Genelleştirilmiş Kompleks Matrislerde İz	372
5.3	Genelleştirilmiş Kompleks Matrisler İçin Elementer Operasyonlar	375
5.4	Genelleştirilmiş Kompleks Matrisler Kümesinin Cebirsel Yapıları	378
5.4.1	\mathbb{R} Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı	378
5.4.1.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{C}_p), +, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ Vektör Uzayının Bazı	378
5.4.2	\mathbb{C}_p Halkası Üzerindeki Modül Yapısı	379
5.4.2.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{C}_p), +, \mathbb{C}_p, +, \cdot, \odot\}$ Modülünün Bazı	381
5.4.3	$M_n(\mathbb{R})$ Üzerinde Sol Modül Yapısı	382
5.4.3.1	$\{M_n(\mathbb{C}_p), +, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \Theta\}$ Sol Modülünün Bazı	384
5.5	Genelleştirilmiş Kompleks Blok Matrisler	385
5.5.1	Genelleştirilmiş Kompleks Blok Matrisler Üzerinde Cebirsel İşlemler ve Cebirsel Yapılar	386
5.5.1.1	Genelleştirilmiş Kompleks Blok Matrislerde Toplama İşlemi	386
5.5.1.2	Genelleştirilmiş Kompleks Blok Matrisin Skalere Çarpımı	389
5.5.1.3	Genelleştirilmiş Kompleks Blok Matrislerin Çarpma İşlemi	392
5.5.1.4	Genelleştirilmiş Kompleks Blok Matrislerin Kronecker Çarpımı ...	394
5.5.1.5	Genelleştirilmiş Kompleks Blok Matrisin Eşleniği	397
5.5.1.6	Genelleştirilmiş Kompleks Blok Matrisin Transpozu	398
5.5.1.7	Genelleştirilmiş Kompleks Blok Matrislerin Eşlenik Transpozu ...	400

5.5.1.8	Genelleştirilmiş Kompleks Blok Matrisin İzi	401
5.6	Özel Tanımlı Genelleştirilmiş Kompleks Matrisler.....	402
5.7	Genelleştirilmiş Kompleks Matrislerin Matris Temsili.....	411
5.7.1	\mathbb{R} -Vektör Uzayındaki Genelleştirilmiş Kompleks Matrisler Temsili ...	411
5.7.2	\mathbb{C}_p -Modül Üzerindeki Genelleştirilmiş Kompleks Matrisler Temsili ...	416
5.7.3	$M_n(\mathbb{R})$ -Modül Üzerindeki Genelleştirilmiş Kompleks Matrisler Temsili	420
5.8	Genelleştirilmiş Kompleks Matrislerin Determinantı.....	434
5.8.1	Determinant Hesaplamaları	436
5.8.2	Determinant Açılımları	438
5.8.3	Klasik Determinantın Diğer Hesaplamaları	441
5.8.3.1	$M_2(\mathbb{C}_p)$ Üzerinde Determinant Hesaplamaları.....	441
5.8.3.2	$M_3(\mathbb{C}_p)$ Üzerinde Determinant Hesaplamaları.....	444
5.9	Genelleştirilmiş Kompleks Matrislerin Tersinin Hesaplanması	449
5.9.1	Genelleştirilmiş Kompleks Matrisin Eki ve Ek Matris Yardımıyla Ters	449
5.9.2	Genelleştirilmiş Kompleks Matrisin Tersini Reel Blok Matris Temsili İle Bulma	454

BÖLÜM 6

BİKOMPLEKS MATRİSLER

6.1	Bikompleks Sayılar ve Bikompleks Matrisler	462
6.2	Bikompleks Matrislerde Cebirsel İşlemler	468
6.2.1	Bikompleks Matrislerde Toplama.....	468
6.2.2	Bikompleks Matrislerde Çarpma	471
6.2.3	Bikompleks Matrislerde Eşlenik	476

6.2.4	Bikompleks Matrislerde Transpoz	479
6.2.5	Bikompleks Matrislerde Eşlenik Transpoz	482
6.2.6	Bikompleks Matrislerin Tersi	483
6.2.7	Bikompleks Matrislerde İz	486
6.3	Bikompleks Matrisler Kümesinin Cebirsel Yapıları	488
6.3.1	\mathbb{R} Cismi Üzerindeki Cebir Yapısı	488
6.3.1.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{B}\mathbb{C}), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ Vektör Uzayının Bazı	489
6.3.2	\mathbb{C} Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı	490
6.3.2.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{B}\mathbb{C}), \oplus, \mathbb{C}, +, \cdot, \odot\}$ Vektör Uzayının Bazı	491
6.3.3	$\mathbb{B}\mathbb{C}$ Halkası Üzerindeki Modül Yapısı	492
6.3.3.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{B}\mathbb{C}), \oplus, \mathbb{B}\mathbb{C}, +, \cdot, \odot\}$ Modülünün Bazı	493
6.3.4	$M_n(\mathbb{R})$ Halkası Üzerinde Sol Modül Yapısı	493
6.3.4.1	$\{M_n(\mathbb{B}\mathbb{C}), \oplus, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \Theta\}$ Sol Modülünün Bazı	495
6.3.5	$M_n(\mathbb{C})$ Halkası Üzerinde Sol Modül Yapısı	496
6.3.5.1	$\{M_n(\mathbb{B}\mathbb{C}), \oplus, M_n(\mathbb{C}), +, \cdot, \Theta\}$ Sol Modülünün Bazı	497
6.4	Özel Tanımlı Bikompleks Matrisler	498
6.5	Bikompleks Matrislerin Blok Matris Temsilleri	513
6.5.1	$M_n(\mathbb{R})$ -Sağ Modülündeki Bikompleks Matrisler Temsili	513
6.5.2	$M_n(\mathbb{R})$ -Sol Modülündeki Bikompleks Matrisler Temsili	519
6.5.3	$M_n(\mathbb{C})$ -Sağ Modülündeki Bikompleks Matrisler Temsili	521
6.5.4	$M_n(\mathbb{C})$ -Sol Modülündeki Bikompleks Matrisler Temsili	524
6.6	Bikompleks Matrisin Kompleks Adjoint Matrisi	526
6.7	Bikompleks Matrislerin Determinantı	530
6.7.1	Bikompleks Matrislerin Klasik Determinantı	530
6.7.2	Bikompleks Matrisin Eki ve Ek Matris Yardımıyla Matrisin Tersi	535
6.7.3	Bikompleks Matrislerde Benzerlik	538

6.7.4	Bikompleks Matrislerin q -Determinantı	539
6.8	Bir Bikompleks Matrisin Özdeğer ve Özvektörleri	541
6.9	Literatürde Alternatif Tanımlamalar	543

BÖLÜM 7

HİPER DUAL MATRİSLER

7.1	Hiper Dual Sayılar ve Hiper Dual Matrisler	548
7.2	Hiper Dual Matrisler ve Cebirsel İşlemler	550
7.2.1	Hiper Dual Matrislerde Toplama	551
7.2.2	Hiper Dual Matrislerde Çarpma	553
7.2.3	Hiper Dual Matrislerde Eşlenik	558
7.2.4	Hiper Dual Matrislerde Transpoz	560
7.2.5	Hiper Dual Matrislerde Eşlenik Transpoz	562
7.2.6	Hiper Dual Matrislerin Tersi	564
7.2.7	Hiper Dual Matrislerin İzi	570
7.3	Hiper Dual Matrisler Kümesinin Cebirsel Yapıları	572
7.3.1	\mathbb{R} Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı	572
7.3.1.1	\mathbb{R} Cismi Üzerindeki Vektör Uzayının Bazı	573
7.3.2	\mathbb{D} Dual Sayılar Halkası Üzerinde Modül Yapısı	575
7.3.2.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{H}\mathbb{D}), \oplus, \mathbb{D}, +, \cdot, \odot\}$ Modülünün Bazı	576
7.3.3	$\mathbb{H}\mathbb{D}$ Üzerinde Modül Yapısı	577
7.3.3.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{H}\mathbb{D}), \oplus, \mathbb{H}\mathbb{D}, +, \cdot, \odot\}$ Modülünün Bazı	578
7.3.4	$M_n(\mathbb{R})$ Üzerinde Sol (Sağ) Modül Yapısı	579
7.3.4.1	$\{M_n(\mathbb{H}\mathbb{D}), \oplus, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \Theta\}$ Modülünün Bazı	580

7.3.5	$M_n(\mathbb{D})$ Üzerinde Sol (Sağ) Modül Yapısı.....	581
7.3.5.1	$\{M_n(\mathbb{H}\mathbb{D}), \oplus, M_n(\mathbb{D}), +, \cdot, \ominus\}$ Modülünün Bazı.....	582
7.4	Özel Tanımlı Hiper Dual Matrisler	583
7.5	Hiper Dual Matrislerin Blok Matris Temsilleri.....	584
7.5.1	$M_n(\mathbb{R})$ - Modülündeki Hiper Dual Matrisler Temsili.....	584
7.5.2	$M_n(\mathbb{D})$ - Modülündeki Hiper Dual Matrisler Temsili	588
7.6	Hiper Dual Matrisin Dual Adjoint Matrisi	589
7.7	Hiper Dual Matrislerin Determinantı	591
7.7.1	Hiper Dual Matrislerin Klasik Determinantı	591
7.7.2	Hiper Dual Matrislerin d -Determinantı.....	595
7.8	Bir Hiper Dual Matrisin Özdeğer ve Özvektörleri.....	599

BÖLÜM 8

KUATERNİYON MATRİSLER

8.1	Kuaterniyon Matrisler ve Cebirsel İşlemler.....	604
8.1.1	Kuaterniyon Matrislerde Toplama.....	605
8.1.2	Kuaterniyon Matrislerde Çarpma	607
8.1.3	Kuaterniyon Matrislerde Eşlenik	612
8.1.4	Kuaterniyon Matrislerde Transpoz	615
8.1.5	Kuaterniyon Matrislerde Eşlenik Transpoz	617
8.1.6	Kuaterniyon Matrislerin Tersi.....	619
8.1.7	Kuaterniyon Matrislerde İz	623
8.1.8	Kuaterniyon Matrislerin Rankı	625

8.2	Kuaterniyon Matrisler Kümesinin Cebirsel Yapıları	626
8.2.1	\mathbb{R} Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı	626
8.2.1.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{H}), +, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ Vektör Uzayının Bazı	627
8.2.2	\mathbb{C} Cismi Üzerindeki Sol Vektör Uzayı Yapısı	628
8.2.2.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{H}), +, \mathbb{C}, +, \cdot, *\}$ Sol Vektör Uzayının Bazı	630
8.2.3	\mathbb{H} Üzerindeki Sol Modül Yapısı	631
8.2.3.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{H}), +, \mathbb{H}, +, \cdot, \otimes\}$ Sol Modülün Bazı	632
8.2.4	$M_n(\mathbb{R})$ Üzerindeki Sol Modül Yapısı	634
8.2.4.1	$\{M_n(\mathbb{H}), +, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \Theta\}$ Sol Modülün Bazı	635
8.2.5	$M_n(\mathbb{C})$ Üzerindeki Sol Modül Yapısı	637
8.2.5.1	$\{M_n(\mathbb{H}), +, M_n(\mathbb{C}), +, \cdot, \Theta\}$ Sol Modülün Bazı	638
8.3	Özel Tanımlı Kuaterniyon Matrisler	639
8.4	Kuaterniyon Matrislerin Blok Matris Temsilleri	641
8.4.1	$M_n(\mathbb{R})$ -Modülündeki Kuaterniyon Matrisler Temsili	641
8.4.2	$M_n(\mathbb{C})$ -Sol Modülündeki Kuaterniyon Matrisler Temsili	646
8.5	Kuaterniyon Matrislerin Kompleks Adjoint Matrisi	648
8.6	Kuaterniyon Matrislerin Determinantı	653
8.6.1	Kuaterniyon Matrislerin Klasik Determinantı	653
8.6.2	Kuaterniyon Matrislerin q -Determinantı	659
8.6.3	Kuaterniyon Matrislerin d -Determinantı	663
8.6.4	q -Determinant ile d -Determinant Arasındaki İlişki	663
8.7	Kuaterniyon Lineer Denklem Sistemleri	665
8.8	Kuaterniyon Matrislerin Özdeğer ve Özvektörleri	668

BÖLÜM 9

SPLİT KUATERNİYON MATRİSLERİ

9.1	Split Kuaterniyon Matrisler ve Cebirsel İşlemler	684
9.1.1	Split Kuaterniyon Matrislerde Toplama	686
9.1.2	Split Kuaterniyon Matrislerde Çarpma	688
9.1.3	Split Kuaterniyon Matrislerde Eşlenik	692
9.1.4	Split Kuaterniyon Matrislerde Transpoz	693
9.1.5	Split Kuaterniyon Matrislerde Eşlenik Transpoz	695
9.1.6	Split Kuaterniyon Matrislerin Tersi	696
9.1.7	Split Kuaterniyon Matrislerde İz	701
9.1.8	Split Kuaterniyon Matrislerin Rankı	703
9.2	Split Kuaterniyon Matrisler Kümesinin Cebirsel Yapıları ..	703
9.2.1	\mathbb{R} Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı	703
9.2.1.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{H}_s), +, \mathbb{R}, \cdot, \odot\}$ Vektör Uzayının Bazı	705
9.2.2	\mathbb{C} Cismi Üzerindeki Sol Vektör Uzayı Yapısı	707
9.2.2.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{H}_s), +, \mathbb{C}, \cdot, \otimes\}$ Sol Vektör Uzayının Bazı	708
9.2.3	\mathbb{H}_s Üzerindeki Sol Modül Yapısı	709
9.2.3.1	$\{M_{m \times n}(\mathbb{H}_s), +, \mathbb{H}_s, \cdot, \otimes\}$ Sol Modülünün Bazı	710
9.2.4	$M_n(\mathbb{R})$ Üzerindeki Sol Modül Yapısı	712
9.2.4.1	$\{M_n(\mathbb{H}_s), +, M_n(\mathbb{R}), \cdot, \Theta\}$ Sol Modülünün Bazı	714
9.2.5	$M_n(\mathbb{C})$ Üzerindeki Sol Modül Yapısı	716
9.2.5.1	$\{M_n(\mathbb{H}_s), +, M_n(\mathbb{C}), \cdot, \Theta\}$ Sol Modülünün Bazı	718
9.3	Özel Tanımlı Split Kuaterniyon Matrisler	720
9.4	Split Kuaterniyon Matrislerinin Blok Matris Temsilleri	722
9.4.1	$M_n(\mathbb{R})$ - Sağ(Sol) Modülündeki Split Matrisler Temsili	722
9.4.2	$M_n(\mathbb{C})$ - Sağ(Sol) Modülündeki Split Matrisler Temsili	733

9.5	Split Kuaterniyon Matrisinin Kompleks Adjoint Matrisi	738
9.6	Split Kuaterniyon Matrislerinin Determinantı	742
9.6.1	Split Kuaterniyon Matrislerinin Satır ve Sütun Determinantı	742
9.6.2	Split Kuaterniyon Matrislerinin q -Determinantı.....	745
9.6.3	Split Kuaterniyon Matrislerinin r -Determinantı.....	746
9.7	Split Kuaterniyon Lineer Denklem Sistemleri.....	749
9.7.1	Kompleks Adjoint Yardımıyla Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü	749
9.7.2	Reel Blok Matris Temsili Yardımıyla Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü.....	754
9.8	Split Kuaterniyon Matrislerinin Özdeğer ve Özvektörleri..	755

BÖLÜM 10

OKTONİYONİK MATRİSLER

10.1	Oktoniyonlar.....	764
10.2	Oktoniyon Matrisler ve Cebirsel İşlemler	772
10.2.1	Oktoniyon Matrislerde Toplama.....	774
10.2.2	Oktoniyon Matrislerde Çarpma	776
10.2.3	Oktoniyon Matrislerde Eşlenik	782
10.2.4	Oktoniyon Matrislerde Transpoz	784
10.2.5	Oktoniyon Matrislerde Eşlenik Transpoz.....	786
10.2.6	Oktoniyon Matrislerin Tersi.....	788
10.2.7	Oktoniyon Matrislerde İz	789
10.3	Oktoniyon Matrisler Kümesinin Cebirsel Yapıları	792
10.3.1	\mathbb{R} Cismi Üzerindeki Vektör Uzayı Yapısı	792
10.3.1.1	\mathbb{R} Cismi Üzerindeki Vektör Uzayının Bazı	794

10.3.2	\mathbb{C} Cismi Üzerindeki Sol Vektör Uzayı Yapısı	796
10.3.3	\mathbb{H} Halkası Üzerindeki Sol Modül Yapısı	797
10.3.4	$M_n(\mathbb{R})$ Üzerinde Sol Modül Yapısı.....	798
10.3.4.1	$M_n(\mathbb{R})$ Üzerindeki Sol Modülünün Bazı	798
10.3.5	$M_n(\mathbb{C})$ Üzerinde Sol Modül Yapısı.....	799
10.3.6	$M_n(\mathbb{H})$ Üzerinde Sol Modül Yapısı	800
10.4	Özel Tanımlı Oktoniyon Matrisler	801
10.5	Oktoniyon Matrislerin Reel Adjoint Matrisleri	802
10.6	Oktoniyon Matrislerin Lineer Denklem Sistemleri.....	810

BÖLÜM 11

FIBONACCI ve LUCAS MATRİSLER

11.1	Fibonacci ve Lucas Sayıları.....	822
11.2	Fibonacci Q -Matris	824
11.2.1	Cassini Özdeşliğinin Matris Yöntemiyle İspatı	826
11.3	Fibonacci M -Matrisi	831
11.4	Genelleştirilmiş M -Matrisi	832
11.5	Fibonacci Q -Matrisi için Özdeğer ve Özvektör.....	834
11.5.1	Fibonacci Q -Matrisin Özdeğer ve Özvektörleri.....	834
11.6	Fibonacci R Matrisi	842
11.6.1	Lucas Sayıları için Cassini Özdeşliğinin Matris Yöntemiyle İspatı ...	843
11.6.2	Cassini Özdeşliği ve Cramer Kuralı.....	844
11.7	Fibonacci ve Lucas Vektörleri	845
11.8	Negafibonacci Sayıları için Matris	847

11.9	Fibonacci Q_L -Matrisi	850
11.9.1	Fibonacci Q_L -Matrisinin Karakteristik Denklemi	853
11.10	Fibonacci S ve Fibonacci K -Matrisleri.....	854
11.11	Fibonacci P -Matrisi.....	857

BÖLÜM A

Reel Matrisler

A.1	$(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ Halkası	862
A.2	$\{M_n(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot, \odot\}$ Vektör Uzayı Yapısı.....	863
A.3	$\{M_{2n}(\mathbb{R}), \oplus, M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \boxtimes\}$ Sol Modül Yapısı.....	864
A.4	Reel Blok Matrislerin Determinantı ve Tersisi	868
A.4.1	Reel Blok Matrislerin Determinantı.....	868
A.4.2	Reel Blok Matrislerin Tersisi.....	869