

# Matematiksel Akıl Yürütme ile İspat Süreçleri

---

Editör: Prof. Dr. *Salim Yüce*



Editör: Prof. Dr. *Salim Yüce*

## MATEMATİKSEL AKIL YÜRÜTME İLE İSPAT SÜREÇLERİ

ISBN 978-625-6890-05-3

Kitap içeriğinin tüm sorumluluğu yazarlarına aittir.

© 2023, PEGEM AKADEMİ

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları Pegem Akademi Yay. Eğt. Dan. Hizm. Tic. AŞ'ye aittir. Anılan kuruluşun izni alınmadan kitabın tümü ya da bölümleri, kapak tasarımı; mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt ya da başka yöntemlerle çoğaltılamaz, basılamaz ve dağıtılamaz. Bu kitap, T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı bandrolü ile satılmaktadır. Okuyucularımızın bandrolü olmayan kitaplar hakkında yayınevimize bilgi vermesini ve bandrolsüz yayınları satın almamasını diliyoruz.

Pegem Akademi Yayıncılık, 1998 yılından bugüne uluslararası düzeyde düzenli faaliyet yürüten **uluslararası akademik bir yayınev**idir. Yayımladığı kitaplar; Yükseköğretim Kurulunca tanınan yükseköğretim kurumlarının kataloglarında yer almaktadır. Dünyadaki en büyük çevrimiçi kamu erişim kataloğu olan **WorldCat** ve ayrıca Türkiye'de kurulan **Turcademy.com** tarafından yayınları taranmaktadır, indekslenmektedir. Aynı alanda farklı yazarlara ait 1000'in üzerinde yayını bulunmaktadır. Pegem Akademi Yayınları ile ilgili detaylı bilgilere <http://pegem.net> adresinden ulaşılabilir.

I. Baskı: Mayıs 2023, Ankara

Yayın-Proje: Şehriban Türüldür  
Dizgi-Grafik Tasarım: Pegem Akademi  
Kapak Tasarımı: Pegem Akademi

Baskı: Sonçağ Yayıncılık Matbaacılık Reklam San Tic. Ltd. Şti.  
İstanbul Cad. İstanbul Çarşısı 48/48 İskitler/Ankara  
Tel: (0312) 341 36 67

Yayıncı Sertifika No: 51818  
Matbaa Sertifika No: 47865

### İletişim

Macun Mah. 204. Cad. No: 141/A-33 Yenimahalle/ANKARA  
Yayınevi: 0312 430 67 50  
Dağıtım: 0312 434 54 24  
Hazırlık Kursları: 0312 419 05 60  
İnternet: [www.pegem.net](http://www.pegem.net)  
E-ileti: [pegem@pegem.net](mailto:pegem@pegem.net)  
WhatsApp Hattı: 0538 594 92 40

# Ön Söz

Problem çözme sürecinde matematiksel kavramları, teknikleri ve yöntemleri dolaylı ya da doğrudan kullanmak olarak ifade edilmekte olan matematiksel düşünme, üst düzey düşünme becerilerini gerektirmektedir. Dünyaca ünlü Macar matematikçi ve matematik eğitimcisi George Polya'ya göre matematiksel düşünmeyi belirlemek için yapılması gerekenlerden biri de matematikçilerin teoremleri nasıl ispatladıklarını anlamaya çalışmaktır.

İspatlar; matematiksel bilginin formüle edilmesi, sonuçların sistematikleştirilmesine katkıda bulunmakta ve sadece bir ifadenin doğruluğunu göstermekle kalmamakta, aynı zamanda öğrencilerin kavramları daha iyi anlamasına, matematiksel anlayışlarının gelişimine de yardımcı olmaktadır. Bu bağlamda genel olarak soyut, ezberlenmesi ve uygulanması gereken bir takım formüller ve işlemler yığını, sadece okullarda öğretilen bir dersten ibaret olduğu gibi yanlış kanılara sahip olunan matematiğin, bu yanlış anlamalardan kurtarılmasında öğrencilerin matematikçilerin yaptıkları ispatları ve ne anlama geldiklerini bilmelerini önem taşımakta bu noktada öğretmenlere de görev düşmektedir. Öğretmenlerin, öğrencilerine ispatın değişik tipleriyle karşılaşabilecekleri elverişli bir öğrenme ortamı sağlamaları, matematiksel düşünmenin önemini vurgulamaları gerekmektedir. Öğretmenlerin ispata yönelik anlayışları öğrencilerin ispat yapma becerilerini etkilemekte, öğretmenlerin ispata yönelik anlamaları sınırlı olduğunda öğrencilerinin ispat konusunda kavram yanlışlarına sahip olma olasılığını da artırmaktadırlar.

Danışmanlığını yaptığım ve lisans öğrencilerimize, araştırma yapma becerileri kazandırma, akademik çalışmalara hazırlamayı amaçlayan TÜBİTAK 2209-A projesinden elde edilen sonuçları içeren bu kitap. MEB Ortaöğretim Matematik Öğretim Programında yer alan tüm öğrenme alanları, alt öğrenme alanları ve konularda yer alan formüllerin ispatlarını ortaöğretim (9-12. sınıf) düzey öğrencileri seviyesinde ele almaktadır.

Çok değerli iki hocam Nihat Eryılmaz (Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü emekli Öğretim Görevlisi) ve Şükrü Adıgüzel'in (Tokat Gazi Osman Paşa Lisesi emekli Matematik Öğretmeni) mesleki tecrübeleri ile danışmanlığını yürüttükleri bu eserin, ortaöğretim öğrencilerine, matematik öğretmenlerine ve tüm matematik severlere yararlı bir kaynak olacağı umut ve kanaatini taşımaktayım.

En derin saygılarımla.

Prof. Dr. *Salim Yüce*

Yıldız Teknik Üniversitesi  
sayuce@yildiz.edu.tr



# İçindekiler

## BÖLÜM 1 MATEMATİK

|         |  |    |
|---------|--|----|
| 1.1     | SAYILAR.....   | 2  |
| 1.1.1   | Sayı Kümeleri .....  | 2  |
| 1.1.1.1 | Rasyonel Sayılar Kümesi.....                               | 2  |
| 1.1.1.2 | İrrasyonel Sayılar Kümesi.....                             | 4  |
| 1.1.1.3 | Taban Aritmetiği.....                                      | 4  |
| 1.1.2   | Bölünebilme Kuralları ve Asal Çarpanlarına Ayırma .....    | 8  |
| 1.1.2.1 | Tam Sayılarda Bölünebilme Kuralları .....                  | 8  |
| 1.1.2.2 | m-Basamaklı Sayının n-Basamaklı Sayıya Bölünebilmesi ..... | 32 |
| 1.1.2.3 | Bir Tam Sayının Asal Çarpanları ve Tam Sayı Bölenleri..... | 36 |
| 1.1.2.4 | Tam Sayılarda EBOB ve EKOK.....                            | 40 |
| 1.1.3   | Köklü İfadeler .....                                       | 43 |
| 1.1.4   | Problemler.....  | 44 |
| 1.1.4.1 | Faiz Problemleri .....                                     | 44 |
| 1.1.4.2 | Saat Problemleri .....                                     | 45 |
| 1.2     | SAYMA VE OLASILIK.....                                     | 47 |
| 1.2.1   | Sıralama ve Seçme.....                                     | 47 |
| 1.2.1.1 | Sayma Yöntemleri .....                                     | 47 |
| 1.2.1.2 | Permütasyon.....   | 47 |
| 1.2.1.3 | Dairesel permütasyon.....                                  | 50 |
| 1.2.1.4 | Kombinasyon .....  | 51 |
| 1.2.1.5 | Tekrarlı Permütasyon .....                                 | 52 |

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 1.2.1.6 | Pascal Üçgeni.....  | 53  |
| 1.2.1.7 | Binom Açılımı .....   | 54  |
| 1.3     | FONKSİYONLAR.....   | 61  |
| 1.3.0.1 | Fonksiyonlarla İlgili Uygulamalar.....  | 62  |
| 1.4     | POLİNOMLAR.....   | 64  |
| 1.4.1   | Polinom Kavramı ve Polinomlarda İşlemler .....  | 64  |
| 1.4.1.1 | Polinomlarda İşlemler .....   | 64  |
| 1.5     | İKİNCİ DERECEDEDEN DENKLEMLER .....   | 67  |
| 1.5.1   | İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler.....   | 67  |
| 1.5.1.1 | İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Kökleri ile Katsayıları Arasındaki İlişkiler ..... | 67  |
| 1.6     | DİZİLER.....  | 70  |
| 1.6.1   | Diziler .....   | 70  |
| 1.6.1.1 | Gerçek Sayı Dizileri .....  | 70  |
| 1.6.1.2 | Aritmetik ve Geometrik Dizi .....   | 70  |
| 1.6.2   | Bir Dizinin Kısmi Toplamları.....   | 74  |
| 1.6.2.1 | Toplam Sembölü.....   | 74  |
| 1.7     | TRİGONOMETRİ.....   | 84  |
| 1.7.1   | Trigonometrik Fonksiyonlar .....  | 84  |
| 1.7.2   | Kosinüs Teoremi .....   | 88  |
| 1.7.3   | Sinüs Teoremi .....   | 88  |
| 1.7.4   | Toplam-Fark ve İki Kat Açılış Formülleri .....  | 90  |
| 1.8     | LİMİT VE TÜREV.....   | 95  |
| 1.8.1   | Belirsizlikler.....   | 95  |
| 1.8.2   | Limit ve Süreklilik .....   | 96  |
| 1.8.2.1 | Bir Fonksiyonun Bir Noktadaki Soldan ve Sağdan Limiti.....  | 96  |
| 1.8.2.2 | Limit ile İlgili Özellikler .....   | 101 |
| 1.8.3   | Türev .....   | 112 |
| 1.8.3.1 | Türevin Uygulamaları .....  | 123 |
| 1.9     | İNTEGRAL .....  | 130 |
| 1.9.1   | Belirsiz İntegral.....  | 130 |
| 1.9.1.1 | Belirsiz İntegralde Değişken Değiştirme Yöntemi.....  | 134 |
| 1.9.2   | Belirli İntegral .....  | 135 |
| 1.9.2.1 | Belirli İntegralde Değişken Değiştirme Yöntemi .....  | 137 |

|         |                                 |     |
|---------|---------------------------------|-----|
| 1.9.3   | İntegral Uygulamaları . . . . . | 137 |
| 1.9.3.1 | Alan Hesabı. . . . .            | 137 |
| 1.9.3.2 | Hacim Hesabı . . . . .          | 139 |

Kaynakça

143

## BÖLÜM 2

### Geometri

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| 2.1     | Üçgenler . . . . .   | 148 |
| 2.1.1   | Üçgenlerde Temel Kavramlar . . . . .                             | 150 |
| 2.1.1.1 | Üçgende Açı Özellikleri . . . . .                                | 150 |
| 2.1.1.2 | Üçgende Açı Kenar Bağlılıları . . . . .                          | 162 |
| 2.1.2   | Üçgenlerde Eşlik ve Benzerlik . . . . .                          | 169 |
| 2.1.2.1 | Üçgenlerin Eşliği . . . . .                                      | 169 |
| 2.1.2.2 | Üçgenlerin Benzerliği . . . . .                                  | 174 |
| 2.1.2.3 | Üçgenlerde Oran-Orantı . . . . .                                 | 181 |
| 2.1.3   | Üçgenin Yardımcı Elemanları . . . . .                            | 190 |
| 2.1.3.1 | Üçgende Açıortay. . . . .  | 190 |
| 2.1.3.2 | Üçgende Kenarortay . . . . .                                     | 207 |
| 2.1.3.3 | Üçgende Yükseklik . . . . .                                      | 221 |
| 2.1.3.4 | İkizkenar Üçgen ve Eş Kenar Üçgende Yardımcı Elemanlar . . . . . | 225 |
| 2.1.4   | Dik Üçgen. . . . .   | 236 |
| 2.1.5   | Üçgende Alan Bağlılıları. . . . .                                | 251 |
| 2.2     | Dörtgenler ve Çokgenler. . . . .                                 | 257 |
| 2.2.1   | Çokgenler. . . . .   | 258 |
| 2.2.2   | Dörtgenler ve Özellikleri . . . . .                              | 261 |
| 2.2.3   | Özel Dörtgenler. . . . .   | 272 |
| 2.2.3.1 | Yamuk . . . . .  | 272 |
| 2.2.3.2 | Paralelkenar . . . . .   | 282 |
| 2.2.3.3 | Eşkenar Dörtgen. . . . .   | 293 |
| 2.2.3.4 | Dikdörtgen . . . . .   | 297 |
| 2.2.3.5 | Kare . . . . .   | 301 |
| 2.2.3.6 | Deltoid . . . . .  | 302 |

|                 |  |            |
|-----------------|--|------------|
| 2.3             | Çember ve Daire .....                    | 302        |
| 2.3.1           | Çemberin Temel Elemanları .....          | 303        |
| 2.3.1.1         | Çemberde Kirişin Özellikleri .....       | 303        |
| 2.3.1.2         | Çemberde Teğetin Özellikleri .....       | 309        |
| 2.3.2           | Çemberde Açılar .....                    | 318        |
| 2.3.3           | Bir Noktanın Çembere Göre Kuvveti .....  | 328        |
| 2.3.4           | Dairenin Çevresi ve Alanı .....          | 331        |
| 2.4             | Uzay Geometri .....                      | 335        |
| 2.4.1           | Katı Cisimler .....                      | 335        |
| 2.4.1.1         | Dik Prizmalar .....                      | 335        |
| 2.4.1.2         | Dik Piramitler .....                     | 339        |
| 2.4.1.3         | Dik Dairesel Silindir .....              | 345        |
| 2.4.1.4         | Dik Dairesel Koni .....                  | 347        |
| 2.4.1.5         | Küre .....                               | 350        |
| 2.5             | Analitik Geometri .....                  | 352        |
| 2.5.1           | Doğrunun Analitik İncelenmesi .....      | 352        |
| 2.5.2           | Çemberin Analitik İncelenmesi .....      | 368        |
| 2.5.3           | Analitik Düzlemde Temel Dönüşümler ..... | 377        |
| 2.5.4           | Konikler .....                           | 378        |
| 2.5.4.1         | Elips .....                              | 379        |
| 2.5.4.2         | Hiperbol .....                           | 382        |
| 2.5.4.3         | Parabol .....                            | 384        |
| <b>Kaynakça</b> |  | <b>387</b> |
| <b>Dizin</b>    |  | <b>389</b> |





# 1. MATEMATİK

|     |                                   |     |
|-----|-----------------------------------|-----|
| 1.1 | SAYILAR.....                      | 2   |
| 1.2 | SAYMA VE OLASILIK.....            | 47  |
| 1.3 | FONKSİYONLAR.....                 | 61  |
| 1.4 | POLİNOMLAR.....                   | 64  |
| 1.5 | İKİNCİ DERECEDEKİ DENKLEMLER..... | 67  |
| 1.6 | DİZİLER.....                      | 70  |
| 1.7 | TRİGONOMETRİ.....                 | 84  |
| 1.8 | LİMİT VE TÜREV.....               | 95  |
| 1.9 | İNTEGRAL.....                     | 130 |

## 1.1 SAYILAR

### 1.1.1 Sayı Kümeleri

#### 1.1.1.1 Rasyonel Sayılar Kümesi

**Teorem 1.1** Devirli ondalık sayının, Rasyonel Sayı karşılığı

$$\frac{\text{virgülli yok sayıp sayının tamamı} - \text{virgülli yok sayıp devretmeyen kısım}}{\text{devreden basamak sayısı kadar 9 ve sağına virgülden sonraki devretmeyen basamak sayısı kadar 0}}$$
 ile bulunur.

*İspat.*  $y \in \mathbb{R}$  ve  $x$  bir rakam olmak üzere

$y = 0, \bar{x}$  devirli ondalık sayısının Rasyonel Sayı karşılığı  $10y = x, \bar{x}$  olmak üzere

$$10y - y = x, \bar{x} - 0, \bar{x} \quad \text{veya} \quad 9y = x \quad \text{veya} \quad y = \frac{x}{9}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade genelleştirilirse;

$X \in \mathbb{R}$  ve  $A_i$  ler rakam ( $1 \leq i \leq n$ ) olmak üzere

$$X = A_1 A_2 \dots A_r A_{r+1} \dots A_k \overline{A_{k+1} \dots A_n}$$

devirli ondalık sayısının Rasyonel Sayı karşılığını bulmak için öncelikle devreden sayı virgülden sonra yalnız bırakılırsa yani sayının her iki yanını  $10^{n-r}$  ile çarpılırsa

$$10^{n-r} X = A_1 A_2 \dots A_r A_{r+1} \dots A_k A_{k+1} \dots A_n \overline{A_{k+1} \dots A_n}$$

elde edilir. Ayrıca  $X$  sayısının devretmeyen kısmı virgülden soluna alınırsa yani  $10^{k-r}$  ile çarpılırsa

$$10^{k-r} X = A_1 A_2 \dots A_r A_{r+1} \dots A_k \overline{A_{k+1} \dots A_n}$$

elde edilir. Böylece devirden kurtulmak için elde edilen eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$10^{n-r} X - 10^{k-r} X = (A_1 A_2 \dots A_r \dots A_k \dots A_n) - (A_1 A_2 \dots A_r \dots A_k)$$

veya

$$(10^{n-r} - 10^{k-r}) X = (A_1 A_2 \dots A_r \dots A_k \dots A_n) - (A_1 A_2 \dots A_r \dots A_k) \quad (1.1)$$

elde edilir. Böylece  $X$  sayısının Rasyonel Sayı karşılığı

$$X = \frac{(A_1 A_2 \dots A_n) - (A_1 A_2 \dots A_k)}{10^{n-r} - 10^{k-r}} \quad (1.2)$$

şeklinde elde edilir. (1.2) eşitliğinin payda kısmı düzenlenirse

$$10^{n-r} = \underbrace{100 \dots 0}_{(n-r) \text{ adet}} \quad \text{ve} \quad 10^{k-r} = \underbrace{100 \dots 0}_{(k-r) \text{ adet}}$$

olmak üzere

$$10^{n-r} - 10^{k-r} = \underbrace{999 \dots 9}_{(n-k) \text{ adet}} \underbrace{000 \dots 0}_{(k-r) \text{ adet}}$$

bulunur. Böylece (1.1) eşitliği

$$\frac{\text{virgülli yok sayıp sayının tamamı} - \text{virgülli yok sayıp devretmeyen kısım}}{\text{devreden basamak sayısı kadar 9 ve sağına virgülden sonraki devretmeyen basamak sayısı kadar 0}}$$

şeklinde yazılabilir.  $\square$

**Teorem 1.2** Devirli ondalık sayının, Rasyonel Sayı karşılığı

$\frac{(\text{devreden basamak sayısı kadar } 9) \cdot (\text{virgüülü yok sayıp devretmeyen kısım}) + \text{devreden kısım}}{\text{devreden basamak sayısı kadar } 9 \text{ ve sağına virgülden sonraki devretmeyen basamak sayısı kadar } 0}$   
ile bulunur.

*İspat.*  $y \in \mathbb{R}$  ve  $x_i$  ler rakam ( $1 \leq i \leq 5$ ) olmak üzere  $y = x_1x_2, x_3\overline{x_4x_5}$  devirli ondalık sayısının Rasyonel Sayı karşılığı:

$$1000y = x_1x_2x_3x_4x_5, \overline{x_4x_5} \quad \text{ve} \quad 10y = x_1x_2x_3, \overline{x_4x_5} \quad \text{için}$$

$$1000y - 10y = 990y = x_1x_2x_3x_4x_5 - x_1x_2x_3$$

yazılabilir. Buradan

$$990y = x_1x_2x_300 + x_4x_5 - x_1x_2x_3 \quad \text{veya} \quad 990y = (100 - 1)x_1x_2x_3 + x_4x_5$$

olmak üzere

$$990y = 99x_1x_2x_3 + x_4x_5 \quad \text{veya} \quad y = \frac{99x_1x_2x_3 + x_4x_5}{990}$$

bulunur.

Bu ifadeyi genelleştirelim:  $X \in \mathbb{R}$  ve  $A_i$  ler rakam ( $1 \leq i \leq n$ ) olmak üzere

$$X = A_1A_2 \dots A_r, A_{r+1} \dots A_k \overline{A_{k+1} \dots A_n}$$

devirli ondalık sayısı için (1.1) eşitliğini

$$(10^{n-r} - 10^{k-r})X = (A_1A_2 \dots A_r \dots A_k \dots A_n) - (A_1A_2 \dots A_r \dots A_k)$$

tekrar ele alalım. Burada farklı bir düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} (10^{n-r} - 10^{k-r})X &= (A_1A_2 \dots A_r \dots A_k \underbrace{00 \dots 0}_{(n-k) \text{ adet}}) + (A_{k+1} \dots A_n) - (A_1A_2 \dots A_r \dots A_k) \\ &= 10^{n-k}(A_1A_2 \dots A_r \dots A_k) + (A_{k+1} \dots A_n) - (A_1A_2 \dots A_r \dots A_k) \\ &= (10^{n-k} - 1)(A_1A_2 \dots A_r \dots A_k) + (A_{k+1} \dots A_n) \\ &= \underbrace{99 \dots 9}_{(n-k) \text{ adet}} (A_1A_2 \dots A_r \dots A_k) + (A_{k+1} \dots A_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $X$  sayısının Rasyonel Sayı karşılığı

$$X = \frac{\underbrace{99 \dots 9}_{(n-k) \text{ adet}} (A_1A_2 \dots A_r \dots A_k) + (A_{k+1} \dots A_n)}{10^{n-r} - 10^{k-r}} \quad (1.3)$$

şeklinde elde edilir. (1.3) eşitliğinin payda kısmı düzenlenirse

$$10^{n-r} - 10^{k-r} = \underbrace{999 \dots 9}_{(n-k) \text{ adet}} \underbrace{0000 \dots 0}_{(k-r) \text{ adet}}$$

bulunur. Böylece (1.3) eşitliği

$$\frac{(\text{devreden basamak sayısı kadar } 9) \cdot (\text{virgüülü yok sayıp devretmeyen kısım}) + \text{devreden kısım}}{\text{devreden basamak sayısı kadar } 9 \text{ ve sağına virgülden sonraki devretmeyen basamak sayısı kadar } 0}$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\square$

### 1.1.1.2 İrrasyonel Sayılar Kümesi

**Teorem 1.3**  $\sqrt{2}$  sayısı bir rasyonel sayı değildir, irrasyonel sayıdır.

*İspat.*  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$  rasyonel sayılar kümesi olmak üzere  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  olduğunu göstereceğiz:  $a, b \in \mathbb{Z}$  olmak üzere, eğer  $\sqrt{2}$  sayısı  $\frac{a}{b}$  şeklinde yazılabilir ise  $\sqrt{2}$  sayısı bir rasyonel sayıdır, aksi taktirde  $\sqrt{2}$  sayısı bir rasyonel sayı değildir. Bu, olmayana ergi yöntemiyle ispatlanabilir.<sup>1</sup>  $\sqrt{2}$  sayısının bir rasyonel sayı olduğu varsayalım. Bu durumda  $\text{ebob}(a, b) = 1$  olmak üzere  $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$  olacak şekilde  $a, b \in \mathbb{Z}$  ve  $b \neq 0$  sayıları vardır.  $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$  eşitliğinde her iki tarafın karesi alınır ise  $(\frac{a}{b})^2 = (\sqrt{2})^2$  veya  $\frac{a^2}{b^2} = 2$  ve

$$a^2 = 2b^2 \quad (1.4)$$

elde edilir. (1.4) eşitliğinin sağ tarafındaki  $2b^2$  sayısı bir çift sayı olduğundan eşitliğin sol tarafındaki  $a^2$  sayısı da çift sayıdır Yani  $a$  sayısı bir çift sayıdır. O zaman  $a = 2c$  olacak şekilde  $\exists c \in \mathbb{Z}$  sayısı vardır. (1.4) eşitliğinde  $a$  yerine  $2c$  yazılır ise  $(2c)^2 = 2b^2$  veya  $4c^2 = 2b^2$  olmak üzere

$$2c^2 = b^2 \quad (1.5)$$

elde edilir. (1.5) eşitliğinin sol tarafındaki  $2c^2$  sayısının bir çift sayı olduğu açıktır. Bu durumda eşitliğin sağ tarafındaki  $b^2$  sayısı da çift sayıdır Yani  $b$  sayısı bir çift sayıdır.  $\text{ebob}(a, b) = 1$  olduğundan bu bir çelişkidir. O halde  $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$  olacak şekilde  $a$  ve  $b$  tamsayıları bulunmaz. Yani  $\sqrt{2}$  sayısı bir Rasyonel Sayı olmayıp bir İrrasyonel Sayıdır.  $\square$

### 1.1.1.3 Taban Aritmetiği

**Teorem 1.4**  $A_i$  ler rakam  $(-m \leq i \leq n)$  olmak üzere  $a \in \mathbb{Z}^+$  tabanındaki  $X = (A_n \dots A_1 A_0, A_{-1} A_{-2} \dots A_{-m})_a$  ondalık sayısının onluk tabandaki eşiği

$$X = a^{-m} A_{-m} + \dots + a^{-2} A_{-2} + a^{-1} A_{-1} + a^0 A_0 + a^1 A_1 + \dots + a^n A_n$$

şekindedir.

**Teorem 1.5 (Bölme Algoritması)**  $a, b \in \mathbb{Z}$  ve  $b > 0$  olmak üzere,  $a = qb + r$  ve  $0 \leq r < b$  olacak şekilde tek türlü belirlenen  $q, r \in \mathbb{Z}$  vardır. Buradaki  $q$  tamsayısı bölüm,  $r$  tamsayısı kalan ve  $a$  ile  $b$  verildiğinde  $q$  ve  $r$  sayılarını bulmaya da *kalanlı bölme* denir. Bu bölme işlemi algoritma üzerinde aşağıdaki gibi de ifade elde edilir:

$$\begin{array}{r} a \\ \hline b \\ \hline q \\ \hline r \end{array}$$

olmak üzere  $a = qb + r$  bağıntısı geçerlidir.

<sup>1</sup> Olmayana ergi yöntemi kısaca bir hipotezin yanlış olduğu varsayımında bulunarak bunun sonucunda ortaya çıkacak çelişkiler ışığında hipotezin doğru olduğunu göstermek için kullanılan bir ispat yöntemidir.

*İspat.*  $S = \{a - xb : x \in \mathbb{Z}, a - xb \geq 0\}$  kümesi için  $S \neq \emptyset$  olduğu gösterilmelidir.  $b \geq 1$  olduğundan  $|a|b \geq ab$  ve  $x = -|a|$  için  $a - xb = a - (-|a|)b = a + |a|b \geq 0$  yazılabilir. Böylece  $ax - b \in S \neq \emptyset$  bulunur. İyi sıralılık prensibi gereğince  $S$  de bir en küçük eleman vardır. <sup>2</sup> Bu en küçük eleman  $r$  olsun.  $S$  nin tanımından  $r = a - qb \geq 0$  olacak şekilde  $b$  sayısı mevcuttur. Buradan  $a = qb + r$  olacak şekilde  $q$  ve  $r$  sayılarının var olduğu görülür.

Şimdi  $r < b$  olduğunu gösterelim. Eğer  $r \geq b$  kabul edilir ise  $0 \leq r - b = (a - qb) - b = a - (q + 1)b$  yazılabilir. Bu ise  $r - b = a - (q + 1)b$  anlamına gelir. Buradan  $r - b < r$  bulunur. Bu ise  $r$  nin  $b$  den küçük olması ile çelişir. O halde  $r < b$  olmalıdır.

Şimdi  $q$  ve  $r$  nin tekliliğini göstermek için  $a = qb + r = q'b + r'$ ,  $0 \leq r < b$  ve  $0 \leq r' < b$  olduğu kabul edilsin. O halde  $r - r' = (q' - q)b$  ve böylece  $|r - r'| = |(q' - q)b| = |q' - q|b$  yazılabilir. Ayrıca  $-b < -r' \leq 0$  olduğundan  $-b < r - r' < b$  yazılır. Yani  $|r - r'| < b$  elde edilir. Devam edilirse  $|r - r'| = |q' - q|b < b$  ve  $b > 0$  yazılabilir. Buradan  $0 \leq |q' - q| < 1$  ve  $|q' - q| = 0$  bulunur. Böylece  $q' = q$  ve  $r' = r$  elde edilir.

Sonuç olarak,  $a, b \in \mathbb{Z}$  ve  $b \neq 0$  olmak üzere  $a = qb + r$ ,  $0 \leq r < b$  olacak şekilde tek türlü belirlenen  $q, r \in \mathbb{Z}$  vardır. □

**Teorem 1.6** Onluk tabandaki bir sayı herhangi bir tabana çevrilirken sayı o tabana bölünür. Eğer bölüm tabandan büyük ise bu işleme tabandan küçük olana kadar devam edilir. Sonra sırası ile en son bölümden itibaren sondan başa doğru kalan rakamlar yazılır. Yani  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq m$ ,  $0 \leq X_j < k$  ( $X_m \neq 0$ ),  $A_i$  ler rakam ve  $X_j \in \mathbb{N}$  olmak üzere onluk tabandaki  $A_n \dots A_1 A_0$  sayısı  $k$  tabanında

$$(A_n \dots A_1 A_0)_{10} = X_m \cdot k^m + X_{m-1} \cdot k^{m-1} + \dots + X_1 \cdot k^1 + X_0 \cdot k^0 = (X_m \dots X_1 X_0)_k$$

biçiminde yazılabilir.

*İspat.*  $0 \leq i \leq n$  ve  $A_i$  ler rakam olmak üzere onluk tabandaki  $A_n \dots A_1 A_0$  sayısının  $k \in \mathbb{Z}^+$  tabanında yazılması için  $k$  nın kuvvetleri cinsinden ifade edilmesi gerekir. Öyle ise  $B_1, B_2, \dots, B_{m-1}, X_m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $X_0, X_1, \dots, X_{m-1} < k$  olmak üzere aşağıdaki işlemler uygulanmalıdır:

$$\begin{array}{r|l} A_n \dots A_1 A_0 & k \\ \hline & B_1 \\ \hline = & X_0 \end{array} \longrightarrow A_n \dots A_1 A_0 = B_1 \cdot k + X_0 \text{ olsun. Buradan}$$

$$\begin{array}{r|l} B_1 & k \\ \hline & B_2 \\ \hline = & X_1 \end{array} \longrightarrow \begin{aligned} B_1 &= B_2 \cdot k + X_1 \text{ yazılabilir. O halde} \\ A_n \dots A_1 A_0 &= (B_2 \cdot k + X_1) \cdot k + X_0 \\ &= B_2 \cdot k^2 + X_1 \cdot k + X_0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

<sup>2</sup>İyi sıralılık prensibi, doğal sayılar kümesinin boş kümeden farklı herhangi bir alt kümesinin bir en küçük elemanının var olduğunu söyler.